

dr hab. Krzysztof Pągowski

Nieston Gajek, Katuszko "Wnioskowanie statystyczne"

2 sprawdziany:

- na 4 zajęciach,
- na ostatecznym,

Rachunek prawdopodobieństwa.

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych.

ω - zdarzenie elementarne.

S - rodzina podzbiorów zbioru Ω

$$A \in S \Rightarrow A \subset \Omega$$

(Ω, S)

elementy S - to zdarzenia losowe

1° Wymagamy, aby cały zb. zdarzeń elem. Ω
zbyt był elementem S
 $\Omega \in S$

2. (Jeżeli A jest zd. losowym, to i)

$$A \in S \Rightarrow A' \in S$$

$A' = \Omega \setminus A$
 A - zdarzenie losowe,
zdarzenie przeciwne do A

$$\begin{aligned} 3^\circ A_i \in S, i=1, 2, \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ - ciota - sigma ciota,

$(\Omega, S) \rightarrow \delta$ czoł

to jest to rodzinę

$A \in S$ - A jest zdarzeniem (losowym) Ω

$\omega \in A$ - zdarzenie elementarne Ω sprzyja zajściu
zdarzenia losowego A

$A \subset B$ $A, B \in S$

$\hookrightarrow$ zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B

* $\Omega' = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$

$\emptyset$ - jest zdarzeniem niemożliwym, nie zdarze-
nie żadnych zdarzeń elementarnych.

Ω - zdarzenie pewne

$A \cap B$ - zbiór ilorazów zbiorów, jednocześnie zajście A i B
konjunkcja zdarzeń,

$A \cap B = \emptyset$ - zdł. A i B się wykluczają / wyłączone.

$A \cup B$ - alternatywa zdarzeń (suma)
(zaś to A lub B)

$A \setminus B$ - różnica zdarzeń (to co należy do A , ale
nie należy do B)

$A' = \Omega \setminus A$ nie zostało A , zdarzenie przeciwnie do A

(Ω, S) - przestrzeń probabilistyczna,

$\uparrow$
 δ -ciern

spełnia 1°, 2°, 3°

$\Omega \in S \Rightarrow \emptyset \in S$

$A_1, A_2, \dots, A_n \in S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in S$

$A, B \in S \Rightarrow (A \cap B) \in S$

analogicznie dla dowolnych skończonych lub przeliczal-
nych ciągów zdarzeń,

$S = \{\emptyset, \Omega\}$

$S = 2^\Omega$ - zbiór (składający się z) wszystkich
podzbiorów Ω

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$

$\# \Omega$ - liczba elementów zbioru Ω
 $\# \Omega = 6$

$\# S = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_6\}\}$

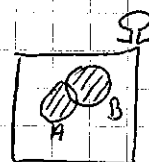
Zad. 3.

$A, B, C \in S$

1. Kiedy zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C .
2. Kiedy zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A i B .

odp.: $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

~~$A \cap B$~~



$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B' \\ B \setminus A &= B \cap A' \end{aligned}$$

od 1

$$(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

3. Kiedy zachodzą dokładnie 2 ze zdarzeń A, B i C ?

$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

4. Kiedy zachodzą co najmniej 2 ze zdarzeń A, B i C ?

$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1° $P: S \rightarrow R_+ \quad (> 0)$

2° $P(\Omega) = 1$

Zdarzeniu pewnemu przypisujemy wartość 1.

3° $\left[(A_i \in S, i=1, 2, \dots) \text{ oraz } (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j) \right] =$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Przebiegu adytywność prawdopodobieństwa.

P - prawdopodobieństwo (miara probabilistyczna)

Kolmogorow 1933.

(Ω, S, P) przestrzeń probabilistyczna.

A - zdarzenie losowe

$P(A)$ - prawdopodobieństwo (zajścia zdarzenia) A .

$P(A)$ - liczba.

WŁASNOŚCI WŁAŚCIWOŚĆ.

w1) $P(\emptyset) = 0$

w2) $(A_1, A_2, \dots, A_n \in S) \wedge (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j) \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Skonsumowano adytywność prawdopodob.

w3) $P(A') = 1 - P(A)$

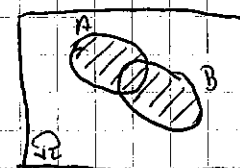
w4) $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

w5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

w6) $P(A) \leq 1$

$$P(A) \in [0, 1]$$

w7) $P(A \cup B)$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B)$$

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)]$$

$$P(B) - P(A \cap B)$$

w8)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

SCHEMAT KLASYCZNY.

$$\# \Omega = n$$

$$S = 2^\Omega$$

$$A \subset \Omega$$

$$P(A) := \frac{\#A}{\#\Omega}$$

$$w \in \Omega$$

$$P(\{w\}) = \frac{1}{n}$$

$$n = 6$$

$$A = \text{pomysł } (w_2, w_4, w_6)$$

$$\#A = 3$$

$$P(\text{pomysł}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

KOMBINATORYKA

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}_{n \text{ czynników}} \quad \text{or} \quad 0! = 1$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$\#A_1 = n_1, \#A_2 = n_2, \dots, \#A_k = n_k$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ to } n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$$

DEFINICJA

k-wyrazowa wariacja z powtórzeniami zbioru Y
nazywamy każdą funkcję, która jest określona:

$$\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow Y$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

$$y_i \in Y$$

TW. Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami
n-elementowego zbioru Y jest równa n^k
Oznaczenie: A_n^k

DEF.

k-wyrazowa wariacja bez powtórzeń zbioru Y,
gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy dowolną funkcję
niezawrotnościową określoną na wosze

$$\{1, 2, 3, \dots, k\} \rightarrow Y$$

$$y_i \neq y_j \text{ dla } i \neq j$$

TW.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń
zbioru n-elementowego jest równa
 $\underbrace{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1))}_{k \text{ czynników}}$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

TW. permutacja n-elementowego zbioru Y nazywamy
my każdą funkcję

$$\{1, \dots, n\} \xrightarrow{\text{na}} Y$$

$$P_n = n!$$

k-elementowa kombinacja n-elementowego
zbioru Y gdzie $0 \leq k \leq n$ to dowolny podzbiór
k-elementowy Y

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_n^k}{P_k} \quad C_n^k = \binom{n}{k}$$

zgodnie z Newtonem

Los. Winoły jedzie 7 osób, jest 10 piskier.
Jedzie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy
wysiądą na różnych piskierach.

$\{3, 3, 1, 10, 2, 8, 9\}$

Ω - zbior 7 elem. wyników o wyroźnieniu ze
zbioru 10 el.

$$\# \Omega = 10^7$$

$$A_{10}^7$$

$$V_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\# R = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4 \quad (\text{każdy na innym piskierze})$$

$$P(R) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4}{10^7} \approx 0,06048$$

Wzrostool. 8.03.2008

BRAT POZOSTATKU

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$P(\Omega) = 1$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Ω - skończony

$$S = 2^\Omega$$

$$A \in S$$

$$\frac{1}{n} = P(\{w_i\}) \quad \# A / \# \Omega$$

Ma 30 kul. jednokolorowych o kolorach:
10 czerwonych
5. niebieskich
15. białych

Oblągę prawdopodobieństwo że wylosujemy kulę
niebieską od białej.

A - zb. los. że kula nie jest biała

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$A = B \cup C$$

niebieska.

czerwona

$$P(\emptyset) = 0$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

$$\# \Omega = 30$$

$$\# B = 5$$

$$\# C = 10$$

$$P(A) = \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = \frac{1}{2}$$

A' = kula jest koloru białego

$$P(A') = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P_A$$

$$P(B) = P_B$$

$$P(A \cap B) = P_{AB}$$

$$P(A \cap B') =$$

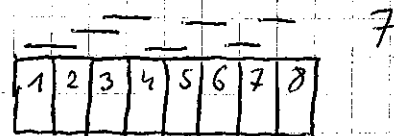
$$(A \cap B') = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$A \cap B \subset A$$

$$P(A \cap B) = P(A) \setminus P(A \cap B) = P_A - P_{AB}$$

Zad 2.

8 różnych książek losowo ułożony kółko siebie.
określ prawdopodobieństwo, że 2 wybrane książki
(pierwsza i druga) stoją przy sobie.



$$\# \Omega = P_8 = 8!$$

$$\{1, 2, \underbrace{\dots}_{6!}\}$$

$$\{2, 1, \underbrace{\dots}_{6!}\}$$

$$P(A) = \frac{2! \cdot 6! \cdot 7}{8!} = \frac{2 \cdot 7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

liczba wszystkich podzbiorów:

$$\Omega \quad \# \Omega = n \quad \#(2^\Omega) = 2^n$$

1, 2, 3, ..., 12, 13, 23.

Niech $0 \leq k \leq n$

udowodnić, że suma:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Symbol newtona.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

k -osób ~~zawsze~~ siedzi do n wagonów.

$$(1 \leq k \leq n)$$

a) Pr. że każdy wsiedzi do innego wagonu.

Ω zb. odwróconych, które osobie przyporządkowujemy wagon.

$$\# \Omega = A_n^k = n^k$$

$$\# A = V_n^k = \overbrace{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1))}^k$$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

b) Pr. że wszyscy wsiedzieli do 1 wagonu.

$$\begin{cases} \Omega - \text{zb. odwróconych, "osoba"} \rightarrow \text{wagon} \\ \# \Omega = A_n^k = n^k \\ \# B = n \end{cases}$$

$$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{1}{n^{k-1}}$$

c) Pr. że wszyscy wsiedzieli do 1 wagonu.

$$P(c) = 1.$$

$$P(c) = \frac{1}{n^k}$$

d) Pr. że wszyscy wsiedzieli do 1, lub 2 wy.

$$\# D = 2^k$$

$$P(D) = \left(\frac{2}{n}\right)^k$$

$$(w_1, w_2, \dots, w_k) \\ w_i \in \{1, 2\}$$

c) Pr. że wszystkie osoby usiady albo do 1, albo do 2 wagonu.

Ω - zbior odwzorowania „osoba $\rightarrow$ wagon”

$$\#\Omega = A_n^k = n^k$$

$$\#E = 2$$

$$P(E) = \frac{2}{n^k}$$

f) Pr. że wszystkie osoby pierwszy wag. porzutek pusty.

Ω - zbior odwzorowania „osoba $\rightarrow$ wagon

$$\#\Omega = A_n^k = n^k$$

$(w_1, w_2, w_3, \dots, w_k)$

$$\#F = (n+1)^k$$

$w \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$

$$P(F) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k$$

W pudełku 4 białe i 3 czerwone.

Wybieram (bez zwracania) dwie kule.

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule, białe?

$K_B \cup K_C$

$$\Omega = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in K_B \cup K_C\}$$

$$\#\Omega = 7 \cdot 6$$

$$\binom{7}{2}$$

$$\#A = 4 \cdot 3$$

$$\binom{4}{2}$$

$$P(A) = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}$$

Ω - dwuelementowy podzbiór $K_B \cup K_C$

A - dwuelementowe podzbiory zbioru kul sortu białych.

K_B

$$\#\Omega = C_7^2 = \binom{7}{2}$$

$$\#A = C_4^2 = \binom{4}{2}$$

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 3 = 21$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

b) jakie jest prawdopodobieństwo, że jedna biała, a druga czerwona.

*

$A_1: (k_1, k_2) \mid k_1 \in K_B, k_2 \in K_C$

$A_2: (k_1, k_2) \mid k_1 \in K_C, k_2 \in K_B$

$$A = A_1 \cup A_2$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2)$$

$$\#A_1 = 4 \cdot 3$$

$$\#A_2 = 3 \cdot 4$$

~~~~~

W pudełku 4 białe i 3 czerwone. Wybieram (bez zwracaniem) dwie kule. Wiadomo, że druga kula jest biała.

a) obliczmy prawdopodob. ze pierwsza kula była biała.

$K_B \quad K_C$

$$\Omega = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_2 \in K_B\}$$

$$(c, b) \quad 3 \cdot 4$$

$$(b_i, b_j) \quad b_i \neq b_j \quad 4 \cdot 3$$

$$\#\Omega = 24$$

$$\# 4 \cdot 3 = 12$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Nierozstrzygnięte zdarzenia.

$$(\Omega, S, P)$$

$$A, B \in S \quad \text{sy} \quad \text{NZL} \equiv P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A, B, C \in S \quad \text{sy} \quad \text{NZL} \equiv A, B \text{ NZL}, B, C \text{ NZL}, A, C \text{ NZL}$$

$$\text{oraz} \quad P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$A, B \text{ NZL} \Rightarrow A \cap B' \text{ NZL}, B' \cap A \text{ NZL}, A' \cap B' \text{ NZL}$$

PRZYKŁAD

Prawdopodobieństwo działania pojedynczego układu

$p = 0,9$  System zawiera 2 niezależne takie układy

Ile wynosi prawdopodobieństwo działania systemu,

gdy punkt a)

a) dla takiego jego działania wystarczą prawidłowe funkcjonowanie takiego układu.

b) gdy obydwa takie układy muszą działać prawidłowo.

A - prawidłowe działanie pierwszego układu

B - prawidłowe działanie drugiego układu.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &\stackrel{\text{NZL}}{=} 1,8 - 0,81 = 0,99 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(A \cap B) \stackrel{\text{NZL}}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,81$$

Dod 2

$$P_1 = 0,9 \quad P_2 = 0,8$$

$$\text{a) } 0,98$$

$$\text{b) } 0,72$$

Mamy  $n$ -zdarzeń losowych

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in S \quad \boxed{\text{NZL} \Rightarrow A_1', A_2', \dots, A_n' \text{ też NZL}}$$

$P(A_k) = P_k$  gdzie jest prawdopodobieństwo, że nie nastąpi zadanie ze zdarzenia  $A_k$

$$A_1' \cap A_2' \cap A_3' \dots A_n'$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k'\right) = P(A_1') \cdot P(A_2') \dots P(A_n')$$

$$P(A_k') = 1 - P_k = (1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n)$$

zad. domowe

$A_1, A_2, \dots, A_n \quad n \geq 1$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że nastąpi  
któreś (przynajmniej jedno) ze zdarzeń  $A_k$ ,  
o ile wiadomo że prawdopodobieństwo

$$P(A_k) = p_k$$

$(\Omega, \mathcal{S}, P)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  dla  $P(B) > 0$   
jest to prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  pod  
warunkiem  $B$  ( $A$  przy hipotezie  $B$ )

$$P_B(A) = P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) =$$

$(\Omega, \mathcal{S}, P_B)$

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = ? \dots$$

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A, B \text{ NZL}$$

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ NZL}$$

zapożyczyć się z mat. do 25

$k$ -poziomów

$n$ -wagów

$$2 \leq k \leq n$$

g) wszyty węzeł do konfiguracji 2 węzłów

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\{a, b\} = a \neq b$$

$$\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{a, b\}$$

$$2^k$$

$$\#G = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^k$$

$\Omega$

$$\#\Omega = n^k$$

$$P(G) = \frac{\#G}{\#\Omega} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^k}{n^k}$$

$$n = k = 12$$

$$P(G) = 1$$

Mozderiwast zderzine

A, B, N2L  $\Rightarrow$

(A: B synchronizing)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

NZL A

$$(P(A) = 0) \Rightarrow (\text{für } k \in \mathbb{R})$$

A, B NZL

$$0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$$

NZ12  $P(A) = 1 \Rightarrow (\text{ob } K, B \in S, A, B \text{ s. g. NZ14})$

A, B      N2L  $\Rightarrow$

$$A, B \quad N \nabla C \quad C \Rightarrow$$
$$A, B' \quad N \subset C \quad C \Rightarrow$$
$$A'B' \quad N2L \quad \Leftrightarrow$$

NZL 3

$\text{yes! } A \subseteq B$ ,  $P(A|B) = P(A)$ ,  $+0$   $A : B$   $NZL \Leftrightarrow P(A) = 0$  ab  
 $P(B) = 1$   $D=0.659$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

N 2 L 4

Zdaniem portywnie o dodatnie prowadzono badania w celu  
się zalecnie.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$0 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\#50 = n$$

$$\# A \vdash n_A$$

$$\# B = n_B$$

$$P(\{n\}) = \frac{1}{5}$$

$$\#(A \cap B) = n_{AB}$$

$$A + B \rightarrow \text{N}_2\text{L} \quad (=)$$

$$\frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{n_B}{n} \Leftrightarrow \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_A}{n}$$

PRZYKŁAD

$$n \geq 2 \quad \text{instalone turbo instancie}$$

Wypieramy 7 odry rodnim spořnřd rodnim metyřk n obřem

A - w rodzinie jest co najmniej jedno dziecko

B- - 11- 94 dried weight i litp cy

۱۲۷ A : B -

$n = 4$  (d, c, d, c)

$$S_B \upharpoonright \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{d, c\}$$

$$\# \{a, c\} = 2$$

$$\# A = 1 + n$$

$$\# B = 2^m - 2$$

$$\# |A \cap B| = n$$

dołt. jedno drzewo.

$$N2L \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{1+n}{2^n} \cdot \frac{2^{n-2}}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 1+h = 2^{n-1} \Leftrightarrow h=3 \quad \textcircled{D}$$

$A, B, C$  NZL  $\Leftrightarrow$

$A, B$  oraz  $A, C$

oraz  $B, C$  NZL (Paromi)

$$\text{oraz } P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

NZL 6 (niezależności paromi)  $\nrightarrow$  Niezależności łącznej  
(Dla  $n > 3$ )

$A_1, A_2, A_3$

$A_1, A_2$  NZL

$A_2, A_3$  NZL

Ale  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ , PRZYKŁAD:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$$

$$A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$$

$$A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} \quad i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad i \neq j$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

NZL Paromi nie pokrywa ze sobą

-||- -||-  $\nrightarrow A_1 \cap A_2$  NZL od  $A_3$

Ogólniejszy fakt: Jeżeli  $A_1, A_2, A_3$  NZL Paromi oraz  
 $(A_1 \cap A_2)$  NZL od  $A_3$  to  $A_1, A_2, A_3$  NZL ŁĄCZNE

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

NZL 7.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

NZL PAR  $A_i, A_j$

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_2 = A_3 = \{1, 5, 6, 7\}$$

Zadanie

Zdarzenie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  zespolowo są NZL o znanych prawdop.

a) prawdopodobieństwo zajścia wszystkich naraz.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

b) prawdopodobieństwo, że nie zajdzie żadne ze zdarzeń

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) = \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)]$$

c) prawdop. że zajdzie dokładnie jedno, t.j. zdarzeń  $A_i$

$$(A_1 \cap A_2' \cap \dots \cap A_n') \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3' \dots \cap A_n') \dots \cup \\ \cup (A_1' \cap A_2' \dots \cap A_{n-1}' \cap A_n) = \text{SUMA ROZŁĄCZNA}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \left[ P(A_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [1 - P(A_j)] \right]$$

Jeżeli  $P(A) = p$  dla korekty i

- a)  $p^n$
- b)  $(1-p)^n$
- c)  $n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$

d) Prawdopodobieństwo, że zajdzie choć jedno  $A_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right)'\right) =$$

De Morgan  
prawa  $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^n A_i'$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^n P(A_i') = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

Zad.

Losujemy karty z talii

- a) A - oznacza wylosowanie asa,
- B - wylosowanie czerwonej karty.
- A i B wzl? TAK.

$$\frac{2}{52} = \frac{1}{26} \neq \frac{4}{52}$$

b) A wylosowanie pikę

B - czerwony

Nie są wzl

(są zależne)

$$\frac{1}{52} \neq \frac{13}{52} \cdot \frac{2}{52}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) > 0$$

$$(\Omega, \Delta, P)$$

$$(\Omega, \Delta, P_B)$$

$$P_B(A) = P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

REG. ŁAŃCUCHA

Mamy  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\text{Na } P(A_1 \cap A_2 \dots A_n) > 0$$

Wówczas

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots A_{n-1})$$

Zad.

10 białych i 20 czerwonych kule. Losujemy bez zwracania 3 kule: Prawdopodobieństwo, że wszystkie są białe.

$A_i$  - i-ta kula jest biała.

$$P(A_1) = \frac{10}{30} \quad P(A_2|A_1) = \frac{9}{29}$$

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{28}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28}$$

ZAD

A, B wzl i o dodatnim prawdopodobieństwie. Jaka jest szansa, że zostą obie z loterii, jeżeli wiadomo, że zostało jedno z nich?

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

Zad.

wybrany rodzinę z 2 dziećmi

Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że jest 2 chłopców  
jeśli wiadomo

- starsze dziecko chłopiec
- co najmniej 1 chłopiec.

a) A - dwóch chłopców

$B_1$  - starsze dziecko chłopiec.

$$\# \Omega = 4 \quad P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_1) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B_1) = \frac{1}{4}$$

b)  $B_2$  - co najmniej 1 chł.

$$P(B_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(A|B_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B_2) = \frac{1}{4}$$

Zad.

w tali 4 kule i 4 osy

losujemy 2 kule (bez zwrotu) wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wybrano 2 osy. a) że wybrano co najmniej jednego osa.

A - dwa osy

$B_1$  - co najmniej 1 osa.

$$P(A|B_1)$$

$$\# \Omega = C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$\Omega$ : dowolna para

$\{os_1, os_2\}$

CRC

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 6$$

$$\# B_1 = 2^4 = 16$$

$$P(B_1) = \frac{22}{28}$$

$$P(B \cap B) = \frac{C_4^2}{20} = \frac{6}{20}$$

$$P(A|B) = \frac{6}{22} = \frac{3}{11} = \frac{6}{22}$$